Perfektion und Information im Mathematikunterricht

Walter Kranzer (Wien)

Wie in jeder Wissenschaft gibt es auch in der Mathematik gewisse Kentnisse faktischer wie operativer Art, die der Schüler gut beherrschen muß, will er nicht bei komplexeren Aufgaben schon am Handwerkzeug scheitern, ehe er sich dem mathematischen Kern des Problems zuwendet.

Ein mal Eins, numerisches und algebraisches Rechnen mit Brüchen, das Lösen linearer und quadratischer Gleichungen, die einfachen Zirkel-Lineal-Konstruktionen, die Grundoperationen mit Potenzen, Basiswissen in der Analytischen Geometrie, Histogramme u.a. sind Beispiele für Stoffe, in denen der Lehrer auf Perfektion und Routine dringen soll.

Der Wirkungsgrad für gutes und haftendes Erwerben derartiger Fertigkeiten bzw. Kemtnisse ist stoff- und altersbedingt. Bekanntlich kann einem Menschen, der in seinen ersten 20 Lebensjahren nicht den geringsten menschlichen Kontakt hatte, das Sprechen kaum mehr beigebracht werden, während das Kleinkind in der elterlichen Umgebung mühelos sprechen lernt. Analog wird jemand, der das 1×1 in der Volksschule mangelhaft erlernt hat, trotz allem Nachholbemühen als Erwachsener dabei stets stolpern.

Doch ist die Perfektion, die hier gemeint ist kein Selbstzweck sondern das unerläßliche Mittel, für mathematische Betätigungen auf höherer Stufe gewappnet zu sein. Übertreibungen sind immer zu verurteilen, etwa die Forderung, die ersten fünf Mersenneschen Primzahlen auswendig zu wissen. Man sollte sich vielmehr bemühen, die jugendliche Wettbewerbsfreude, Neugier und den Spieltrieb zu nützen, um die erforderliche Perfektion mit verringertem Lerndruck zu erreichen. Das kann manchmal in der Weise geschehen, daß der Jugendliche motiviert wird, routinefördernde Aktivitäten selbstständig aufzunehmen, ohne sich dessen bewußt zu sein, dabei Perfektion zu erwerben. Dazu einige Beispiele zur Förderung des Kopfrechnens.

1) Der Lehrer läßt sich ein kleinere natürliche Zahl $N = a_1$ nennen und die weiteren Glieder einer Folge nach der Vorschrift

$$a_{n+1}=a_n/2 \quad \text{für gerades } a_n,$$
$$a_{n+1}=3.a_n \quad \text{für ungerades } a_n,$$

berechnen. Für N=5 ergibt sich die Folge

5,16,8,4,2,1,4,2,1,4,2,1,...,

für N=11

11,34,17,52,26,13,40, 20,10,5,16,8,4,2,1,4,2,1,...

Obwohl das Einmünden in die Periodizität 4,2,1 bisher immer eintrat, ist die Frage nach der Allgemeingültigkeit des Ergebnisses noch offen.

Der Vorschlag, die Schüler mögen doch nach Ausnahmen suchen, wird sicher schon in den untersten Klassen zur Eigentätigkeit anspornen und dabei das Kopfrechnen festigen.

2) Ausgehend von einer nach Wunsch der Schüler gewählten vierstelligen Zahl (die aber nicht die Form 1000,2111, 3222,... haben darf) läßt man die größte und die kleinste mit N zifferngleiche Zahl anschreiben. V o r h e r .notiert man gut sichtbar auf der Tafel die Zahl 6174. Nun läßt man die kleinste von der größten Zahl abziehen. Möglicherweise ist die Differenz bereits 6174, dann ist die Überraschung vollkommen. Wenn noch nicht 6174 erscheint, wiederholt man das Verfahren für die Differenz und setzt das solange fort, bis 6174 auftritt. Es wurde bewiesen, daß höchstens 7 solche Operationen nötig sind, um bei 6174 zu landen. Ohne zu sagen, daß dies so sein muß, kann der Lehrer nach Ausnahmen suchen lassen. In der nächsten Stunde wird er die Nichtexistenz von Ausnahmen mitteilen.

Bsp.: N = 3178;

$$\begin{array}{r} 8731 \\ -\ 1378 \\ \hline 7353 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7533 \\ -\ 3357 \\ \hline 4176 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7641 \\ -\ 1467 \\ \hline 6174 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7641 \\ -\ 1467 \\ \hline 6174 \end{array}$$

Das macht sicher vielen Spaß.

3) Binärzahlen spielen in der Datenverarbeitung eine wichtige Rolle. Die Fertigkeit im dualen Addieren wird spielend erworben - und damit die frühe Vertrautheit mit dem Dualsystem - , wenn man ein einfaches Verfahren bekanntgibt, mit dem Nachrichten verschlüsselt werden können, die nur der Empfänger zu dekodieren vermag. A und B wollen so miteinander - geheim - kommunizieren. Wie das vor sich geht, ist dem Artikel "Unentzifferbares Verschlüsseln" in Nr.68, April 1985, S. 28, der Wiss. Nachr. zu entnehmen, hier wäre die Schilderung zu platzgreifend. Der Lehrer darf sicher sein, daß die Methode von den Schülern begierig aufgegriffen und einige Zeit vergnügt praktiziert wird.

4) Primzahlen üben nicht nur einen eigenartigen Reiz aus, sie eignen sich auch gut für das Hand-in-Hand-Gehen von Perfektion und Information. Die Wettbewerbsfreude erhält Nahrung, wenn man bei den Teilungsregeln einmal dazu auffordert, bis zur nächsten Stunde eine möglichst große Primzahl - egal, wie - aufzutreiben. Das ist ein stärkerer Anreiz zur Beschäftigung mit dem Faktorisieren als anderes. In der nächsten Stunde kann der Lehrer zunächst einmal bemerken, daß das Zerlegen extrem großer, etwa 70-stelliger Zahlen von größter Wichtigkeit für die Arbeit der Geheimdienste und die Geheimhaltung wirtschaftlicher, diplomatischer und militärischer Nachrichten ist. Dann aber wird er wohl die größte dzt. bekannte Primzahl, sie hat 39 751 Stellen(!), nennen, nämlich die 29. Mersennesche Primzahl

$$2^{132049}-1.$$

Wieder läßt sich fragen: "Wer kann Mersennesche Primzahlen, die kleiner als 200 sind, finden?" (3,7,31,127).

5) Weiter sind vollkommene und befreundete Zahlen Anlässe zum Kopfrechnen bei ambitionierten Schülern. Die natürliche Zahl N heißt vollkommen, wenn die Summe aller ihrer von ihr selbst verschiedenen Teiler gerade N ergibt. 6, 28 gehören dazu:

$$6 = 1 + 2 + 3,$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

Wieder kann man Ausnahmen suchen lassen und erst nachher erwähnen, daß die geraden vollkommenen Zahlen stets die Gestalt $2^{n-1}.M_n$, $M_n = 2^n-1$ prim, haben. (In der Oberstufe mag es Schüler geben, die von sich aus das zu beweisen probieren.) Ungerade vollkommene Zahlen sind noch unbekannt, falls sie existieren, sind sie größer als 10^{100}.

Zwei natürliche Zahlen a,b, heißen befreundet,wenn die Teilersumme von a (ohne den Teiler a) gleich b ist und analog die Teilersumme von b (ohne den Teiler b) gleich a ist. Man begnüge sich damit, feststellen zu lassen, daß (284,220) sowie (1210,1184) zwei Paare befreundeter Zahlen sind. Das zweite angeführte Paar hatte Eulen übersehen, aber ein 16jähriger (!) italienischer Junge namens Paganini im Jahre 1866 entdeckt.

6) Wegen ihrer Bedeutung für die Zirkel-Lineal-Konstruktionen von regulären Vielecken pflegen manche Lehrer einige Worte über die Fermatschen Primzahlen $2^{2^n} + 1$ prim, zu verlieren. Nach ihnen kann man ebenfalls, etwa in Abschnitt [1,300], suchen lassen. Der mathematischen Allgemeinbildung dient vor allem die Information über reguläre Vielecke. Dazu genügen ein paar Minuten. Allenfalls geweckter Neugierde kann in persönlichen Gesprächen oder in Supplierstunden entgegengekommen werden.

7) Doppelbrüche bereiten erfahrungsgemäß vielen Jugendlichen Schwierigkeiten. Diese werden entschärft, wenn bei j e d e m Auftreten eines Doppelbruchs auf die Reduktion zu einem einfachen Bruch durch Erweitern mit dem KGV aller Teilnenner gedrungen wird. Hier ist das Streben nach Routine durchaus geboten, aber auch Platz für eine (bloß feststellende) Bemerkung über Kettenbrüche und über die Darstellbarkeit quadratischer Irrationalitäten durch periodische Kettenbrüche, ev. auch für den Hinweis, daß in der Wechselstromtechnik sogenannte Kettenbruchschaltungen auftreten, Kettenbrüche somit auch praktischen Zwecken dienen.

Man sieht, der in weiten Kreisen verschrieenen angeblichen Trockenheit der Mathematik kann entgegengetreten werden, weil

Sachverhalte bestehen, die für jeden geistig Aufgeschlossenen interessant sind. Natürlich wäre es vollkommen verfehlt, die eingestreuten Informationen abzuprüfen. Das wäre ein sehr abwegiges Streben nach Perfektion! Es genügt, wie oben dargetan, oft die bloß numerische Demonstration gewisser Eigenschaften, um rein informativ auf weiterführende Ansätze in der Zahlenlehre hinzuweisen. Das bringt Farbe in den Unterricht! So kann der Lehrer das jugendliche Denken allmählich in die Tiefe und Weite lenken, Querverbindungen zu anderen Wissensgebieten herstellen und Kenntnisse vermitteln, die für fremde Fächer nützlich sind.

Wie sehr eine kurze Bemerkung auch ohne Prüfungsdruck (auf den keineswegs in anderen Zusammenhängen zu verzichten ist) im Gedächtnis zu haften vermag, habe ich in der Physik erlebt. Bei der Wärmelehre erzählte ich unverbindlich, daß der in einem supraleitenden Ring am MIT ganz kurz erregte elektrische Strom 3 Jahre lang widerstandslos ohne Speisung weiterfloß. Eine in der Ringmitte frei schwebend vom Magnetfeld des Stromes gehaltene Eisenkugel behielt diese Haltung drei Jahre lang bei. Geraume Zeit später bot das Ohmsche Gesetz den willkommenen Anlaß zum gleichen Extempore. Aber ich wußte nicht mehr, ob das Schweben 2 oder 3 Jahre angehalten hatte. Also meldete ich 2 Jahre, um nicht zu übertreiben. Prompt meldete sich ein Junge:"Sie haben doch früher von 3 Jahren gesprochen!" Ich erklärte die Diskrepanz und merkte die Dauerhaftigkeit von nebenbei gemachten informativen Bemerkungen.

Nach den Ausschnitten aus der Zahlenlehre wenden wir uns der Proportionalität (wohlgemerkt, nicht den diversen Eigenschaften von Proportionen) zu. Auch dabei bieten sich Ausblicke in mathematische Landschaften jenseits des Schulrahmens an (Herr o. Prof. Dr. P. Gruber, TU Wien, hat in einem Vortrag vor Mathematiklehrern die Wichtigkeit derartiger Ausblicke durch zwei Rufzeichen unterstrichen), welche die Freude an eigener Betätigung wecken. Darüber hinaus bestehen gute Querverbindungen zu nichtmathematischen Wissensgebieten, also zum Abbau des Scheuklappendenkens.

1) Das beginnt bereits bei den Inhaltsverhältnissen

$$A_1:A_2 = L_1^2:L_2^2 \,, \quad V_1:V_2 = L_1^3:L_2^3 \,,$$

wenn man sie für Vergleiche der Sprungfähigkeiten von Floh und Mensch heranzieht. Die Sprungtüchtigkeit ist, als Kraft gesehen, zur Querschnittfläche der betätigten Muskeln, die Schwerkraft zum Volumen des Springers proportional. Also ist die Sprunghöhe H zu $F/V = L^2/L^3 = 1/L$ proportional. Je größer (L) der Springer, desto kleiner die Sprunghöhe im Verhältnis zur Körpergröße L. Der Mensch ist ca. 1000mal größer als der Floh, der ungefähr 50 cm hoch springt, das sind ca. 300 Flohgrößen. Dividiert durch 1000 gäbe das $0,3.1,7$ m $\approx$ 50 cm menschliche Sprunghöhe. Der Mensch springt somit mindestens so "gut" wie der Floh!

2) Wie stark ist die Schwerkraft auf der Schneeoberfläche? Die Schwerkraft ist zur anziehenden Masse M direkt, zum Quadrat des Abstandes R vom Massenmittelpunkt verkehrt proportional, was als gut bekannt vorausgesetzt werden darf:

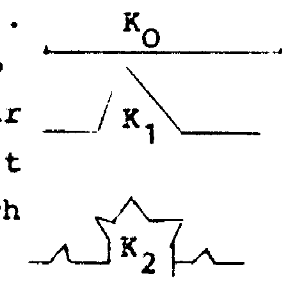
$$F \sim M/R^2 \,.$$

In der Mathematikstunde zu hören, daß die Sonnenmasse 1/3 Mio. Erdmassen und der Sonnenradius 110 Erdradien beträgt, ist sicher kein Nachteil. Die Gewichtskraft eines Körpers auf der Sonnenoberfläche (soferne von einer Oberfläche unkritisch gesprochen werden darf) ist daher $333000/110^2 \approx 28$mal größer als auf der Erde. Setzt man die Masse der Zunge mit nur 100 g an, so wiegt sie auf der Sonne 28 kg. Mit dem Schwätzen hätte man dort einige Schwierigkeiten!

3) Die Fluchtgeschwindigkeit V von einem Himmelskörper (Masse M, Radius R) ist zu $\sqrt{M/R}$ proportional. Die Fluchtgeschwindigkeit vom Erdboden beträgt, wie sogar Zeitungen gelegentlich melden, 11,2 km/s. Welchen Radius müßte die Erde bei gleicher Dichte haben, damit v=c wird (von Laplace aufgeworfen)? Für den n-fachen Radius gilt $v \sim \sqrt{n^3/n} = n$. Mit $n = 300\,000/11,2 \approx 26800$ ergibt sich für den Erdradius $26800.6376 \approx 171$ Mio. km. In diesem Erdball hätte die gesamte jetzige Erdbahn spielend Platz.

An diesem Beispiel erfährt der Schüler einige wichtige astronomische Daten ganz nebenbei, ohne Formeln pauken zu müssen, und merkt, daß auch einfache Überlegungen zu spektakulären Ergebnissen führen können, ohne den sogenannten "gesunden Hausverstand" zu strapazieren.

In der Elementargeometrie gehören die Formeln $u=2r\pi$, $A=r^2\pi$ zum festen Wissensbestand wohl jedes Schülers. Daß der Umfang bzw. die Bogenlänge von Kurven durch sich zunehmend verfeinernde Sehnenapproximation definiert wird, gilt als selbstverständlich und trivial. Das Thema ist eine gute Gelegenheit, das Vertrauen in naives, anschauungsbezogenes Urteilen zu erschüttern, wohl auch eine Aufgabe des Mathematikunterrichts. Die Problematik des Begriffs Bogenlänge ist im Kapitel über geometrische Folgen anhand des <u>von Kochschen Gebildes</u> (auch Schneeflockenkurve genannt) in Form einer einfachen Aufgabe zu aktualisieren (s.Abb.). Die Längen der approximierenden Kurven $K_0, K_1, K_2, \ldots$ sind Glieder der divergenten Folge $a, 4a/3, \ldots$, also strebt die Länge gegen Unendlich. Das gilt auch für jeden beliebig kleinen Abschnitt des Gebildes. Damit ist die Existenz von Punktmengen leicht verständlich und überzeugend nachgewiesen, nach deren Bogenlänge man nicht fragen darf, weil sie gar nicht existiert!



Bleiben wir bei der Geometrie. In der Analytischen Geometrie sind es die Kreistangenten, die den praktischen Wert der komplexen Zahlen aufzuzeigen erlauben. $y = kx+d$ ist die Gleichung einer Tangente T an den Bildkreis K von $x^2+y^2 = r^2$, wenn die Berührbedingung $r^2.(1+k^2) = d^2$ erfüllt ist. Man frage nach den Gleichungen der Tangenten an K aus O. Die Schüler glauben, nicht recht gehört zu haben, aber der Lehrer meint: "Probieren geht über Studieren!" Ergebnis

$$y = \pm i.x \ .$$

Die zwei Tangenten T_1, T_2 haben absurde Eigenschaften. Sie sind zu sich selbst normal, und beliebige Punkte haben, überträgt man die Terminologie und die Formeln im Reellen auf das Komplexe, den Abstand Null! Natürlich ist gleichzeitig auch jede Tangente zu sich selbst parallel. Die "Bodenlänge" ist für jeden Abschnitt Null. Deshalb nennt man T_1, T_2 Minimalgerade.

Verallgemeinerungen führen auf komplex beschreibbare gekrümmte Kurven, bei denen ebenfalls jeder Bogen die Länge Null hat. Sie heißen isotrope Kurven. Den Schülern erscheint nun der Gipfel des Verrückten erreicht. Doch gemach!

Jedermann weiß, daß sich eine in eine beliebige geschlossene Raumkurve eingespannte Seifenhaut so einstellt, daß ihr Flächeninhalt möglichst klein, sie also eine Minimalfläche wird. Selbst einfache Randkurven können große Schwierigkeiten der analytischen Behandlung entgegensetzen. Doch wurde der nachstehende Satz bewiesen, der einen guten Überblick über die gesamte Kurvenklasse gewährt, nämlich der Satz:

> Jede Minimalfläche läßt sich durch Parallelverschieben einer isotropen Kurve entlang einer anderen isotropen Kurve erzeugen.

Der Satz rückt das anscheinend Absurde in die Wirklichkeit der technischen Hydrostatik zurück. Wenn das nicht vom Wert des Komplexen überzeugt...?

Gewiß, für diese Information muß eine volle Unterrichtsstunde "geopfert" werden. Geopfert? Nein, diese Stunde ist nicht verloren! Sie vermittelt einen Einblick in Zusammenhänge, von denen sich der naive Nur-Aufgaben-Rechner nichts träumen läßt. Die Information ist interessant, erstaunlich tiefgehend und kann in Begleitung simpler Tangentenaufgaben gegeben werden.

Schließlich sollte doch einmal in den höchsten Schulstufen der AHS das Thema Nichteuklidische Geometrie angeschnitten werden. Die sphärische Geometrie auf der Kugelfläche, in der die Großkreise den Geraden entsprechen, beliebige nicht idente Großkreise stets einander schneiden und das Zwischen-Axiom nicht mehr gilt, erscheint durchaus als brauchbares Modell für abweichende Axiome.

Die Traktrix (Schleppkurve) läßt sich anschaulich erklären, indem man ein Gewicht am Ende eines Fadens befestigt, das zweite Ende in einem Punkt der Tischkante festhält und darauf achtet, daß der gespannte Faden senkrecht zur Kante liegt. Zieht man ihn rasch nach einer Seite entlang der Kante, so beschreibt das Gewicht eine Traktrix. Durch Ziehen nach der anderen Seite aus der Ausgangsstellung entsteht der andere Kurvenast. Die Rotation der Traktrix um ihre Asymptote (die Tischkante) läßt eine Fläche F entstehen, die sogenannte Pseudosphäre, auf der eine nichteuklidische Geometrie realisiert ist. Die geodätischen Linien von F übernehmen die Rolle der Geraden in der euklidischen Ebene. Ist P ein Punkt auf F, der nicht einer an sich beliebig zu wählenden geodätischen Linie g von F angehört, dann existieren unendlich viele geodätische Linien durch P, die g n i c h t schneiden, ohne daß ein anderes euklidisches Axiom außer Kraft gesetzt wäre.

Unter Verzicht auf jegliches mathematisches Beiwerk genügt wohl die bloße Schilderung des angedeuteten Sachverhaltes, um ein Vorurteil auszumerzen und den Schülern Ausblicke in Denkformen zu gewähren, welche die Geometrie revolutioniert haben. Das Revolutionäre besteht darin, daß jemand auf die Idee kam, daß Unvermögen zum Beweis der Parallelenaussage indiziere, daß diese Aussage unbeweisbar, also ein Axiom sei.

Der Vorteil der symbolischen Vektorschreibweise wird beim Vergleich der Darstellung ebener und räumlicher Gebilde mittels Vektoren offenbar, solange nicht aus numerischen Gründen zur Koordnatenaufspaltung geschritten werden muß. Das liefert den Ansatzpunkt, auch ein wenig über 4- und mehrdimensionale Räume zu sprechen. Die zu $R^2 \to R^3$ analogen Beziehungen $R^3 \to R^4$ beleben die angestoßene Diskussion zwischen Schülern und Lehrer. Freilich hat das Eingehen auf die Fragen und Meinungen nur dann Sinn, wenn der böse Zeitdruck fehlt. Also wird dieses motivierende Thema auf Supplierstunden, letzte Stunden vor größeren Ferien oder - noch besser - auf das Wahlpflichtfach verlegt werden. Vielleicht beginnt daraufhin der eine oder andere Teilnehmer am Wahlpflichtfach, elementare kombinatorische Topologie zu betreiben.

Es wäre schade, die Bemerkung zu unterlassen, daß technische Universitäten sogar Vorlesungen über Darstellende Geometrie im R^4 anbieten. Auch sollte man einmal die Projektion des Kantengerüstes eines 4-dimensionalen Würfels an die Tafel zeichnen.

Die Geometrie ist auch imstande, philosophische Gedanken zu inspirieren. Ich denke da an eine Überlegung von Poincaré. Angenommen, das Universum erfülle das Innere einer Kugel. Doch herrschen in ihr physikalische Bedingungen, die das lineare Schrumpfen jedes Objektes auf die Hälfte bewirken, sobald es sich dem Kugelrand auf die halbe Distanz nähert. Dieses Universum erscheint allen seinen Bewohnern unendlich ausgedehnt, denn niemand vermag dessen Grenze zu erreichen. Ohne zusätzliche strukturtypische Kriterien ist es für die Bewohner unentscheidbar, ob ihre Welt in "Wirklichkeit" endlich mit einer von innen umzugänglichen Außenwelt, also nur eine Blase im umfassenden unendlichen Raum ist. In Zusammenarbeit mit dem Philosophielehrer ist das Thema ein Weg zur Führung der Jugend vom naiven zu reiferen, tiefschürfenden, in positivem Sinne ktitischen Denken! Soll das nicht nach den Intentionen der Schulgesetze ein Unterrichtsziel sein?

Hier begegnet man auch einem Ansatzpunkt a) über posteriori versuchte Modelle der Wirklichkeit, b) über axiomatisch vorgegebene Modelle, für die eine Realisierung gesucht wird, zu sprechen [a) Atommodelle, b) Pseudosphäre]. Ich weiß schon, das sind Luftschlösser, die den Zeitrahmen sprengen würden. Aber mancher Zipfel des Gewebes sollte doch vom Lehrer ergriffen werden. Im Übrigen: Es ist unglaublich, aber wenn die Zeit zur Verfügung steht, kann der geschickte, ambitionierte Lehrer Wesentliches davon auch schwachen Schülern verständlich machen. Ein vordringliches Ziel des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts soll es doch sein, auch der Masse jener Jugendlichen Essenzielles dieser Denkformen fürs Leben mitzugeben, die später ganz andere Berufswege beschreiten. Wer das grundsätzlich ablehnt, der nehme das Wort von Meister Ekkehard zur Kenntnis:

> "Diese Rede sei niemand gesagt, denn der sie sein nennt als eigenes Leben oder wenigstens besitzt als die Sehnsucht seines Herzens."

Daß das Lösen einfacher linearer Gleichungen, linearer Gleichungssysteme und quadratischer Gleichungen routinemäßig beherrscht werden soll, darf als selbstverständlich gelten. Erst eingebrachte Bruch- und Wurzelterme stellen den Schüler vor verschiedenartige Probleme, die nicht über einen Routinekamm zu scheren sind. Bei Systemen kann der Lehrer einflechten, daß die Berechnung von Trägerrosten im Bauwesen sowie von Filtern und gekoppelten Schwingkreisen in der Elektrotechnik und noch vieles Andere aus den technischen Disziplinen umfangreiche Gleichungssysteme zu lösen aufgibt, die in extremen Fällen Tausende Variable enthalten können, was ohne Computereinsatz nicht zu bewältigen wäre.

Manche Schüler erheben die Frage nach den Lösungsformeln für algebraische Gleichungen höherer als zweiten Grades. Selbst, wenn keine diesbezügliche Frage gestellt wird, sollte auf sie rein informativ eingegangen werden. Das setzt voraus, zu klären, was unter "algebraischem Lösen" zu verstehen ist. Ist das getan, genügen ein paar Sätze, die Lösbarkeit der Gleichungen 3. und 4. Grades zu bejahen.

Die Erklärung, daß zu jedem Grad größer als 4 Gleichungen existieren, die man nicht algebraisch lösen kann, ist zu dürftig. Dazu gehört - schon als Rechtfertigung für die Einführung des Gruppenbegriffes - die Mitteilung, daß jeder alg. Gleichung eine Gruppe zugeordnet ist. Die Ordnungen einer bestimmten Art ihrer Untergruppen entscheidet über die Lösbarkeit der Gleichung,

womit ein sehr allgemeines Gesetz jahrhundertelange Bemühungen zum befriedigenden Abschluß brachte.

Diese Ordnungen entscheiden sogar darüber, ob die geometrische Interpretation der Lösung mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Nur, wenn der Lehrer mit emotionellem Engagement die erstaunliche Tatsache hervorhebt, daß plötzlich ein tiefliegender Zusammenhang zwischen so verschiedenen Gebieten wie Gleichungen, Gruppen und Zirkel-Lineal-Konstruktionen zutage tritt, wird er der Jugend ein bleibendes, Achtung erheischendes Bild der Mathematik fürs Leben einprägen können. Ein solcher Lehrer wird auch imstande sein, seinen Schützlingen die Unterscheidung von absoluter und bedingter Unmöglichkeit beizubringen. Die Trisektion des Winkels, die Konstruktion des regulären 7- oder 9-Ecks, die Rektifikation und die Quadratur des Kreises, die Konstruktive Würfelverdopplung, allem im obigen Sinne verstanden, sollen von den Jugendlichen im Herzen als grundsätzlich unmöglich anerkannt werden. Damit ist auch der Boden für das Verständnis der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile 1. und 2. Art bereitet, wofür der Physiker dankbar sein wird, sowie eine Barriere gegen den Einfluß der Phantasien von Scharlatanen aufgerichtet. Leisten nicht diese rein mitteilenden Aussagen wesentliche Beiträge zur Allgemeinbildung, indem sie das Urteilsvermögen stärken? Ein Lehrer, der von diesen Dingen nicht innerlich ergriffen ist, der nicht das Bedürfnis fühlt, die eigene Faszination auf die Jugend zu übertragen, hat seinen Beruf verfehlt!

Noch eine Bitte des Physikers in mir: Mit den Gleichungen hängen eng allgemeinere Verknüpfungen zusammen. Eine davon, nämlich

$$u \oplus v := \frac{u + v}{1+u.v}, \quad u,v \in]-1, 1[,$$

ist kein mathematisches Phantasiegebilde, sondern beschreibt die relativistische Gschwindigkeitsaddition. u, v sind die an der Lichtgeschwindigkeit c gemessenen Geschwindigkeiten. Wird das an einigen Beispielen verdeutlicht, dann empfindet der Schüler ganz allgemein atypische Verknüpfungen nicht mehr als pathologische Exzesse der Mathematiker, sondern als adäquate Beschreibungen von Wirklichkeiten. Ist das nicht "der Rede wert?"

Die Entwicklung des mathematischen Denkens des heranwachsenden Menschen vollzieht sich in mehreren Schüben, die an die Erweiterung der Zahlbereiche gebunden sind. Mit den Dezimalstellen geschieht der Übergang von den natürlichen zu den rationalen Bruchzahlen. Der nächste Schritt führt zu den negativen Zahlen und der Satz des Pythagoras öffnet erst richtig den Zugang zur numerischen Geometrie, denn mit den Quadratwurzeln gelangen die ersten irrationalen Zahlen ins Spiel. Nach Abschluß des Kapitels "Potenzen" steht schließlich der gesamte reelle Zahlbereich zur Verfügung. Jeder dieser Schritte entsprang dem Unvermögen, gewisse Gleichungen innerhalb des schon verfügbaren Zahlbereichs zu lösen. Die letzte Erweiterung in der Schule, nämlich jene zum Körper der komplexen Zahlen, gründet sich die Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

Das routinierte Operieren mit komplexen Zahlen bleibt solange ein bloßer Dressurakt, solange es nicht gelingt, Wirklichkeiten vorzuweisen, die das abstrakte Modell einsichtig realisieren. Die Drehstreckungen um den Ursprung liefern dazu glänzende Möglichkeiten.

Ist nun auf diese Weise eine innerlich anerkannte Beziehung der Schüler zu $\mathbb{C}$ hergestellt, darf man sich nicht wundern, wenn einige gelegentlich wissen wollen, ob nicht noch andere Erweiterungen existieren. Damit fällt das Stichwort zu kurzen Informationen, mit denen wohl die geweckte Neugierde befriedigt, aber zugleich auch weiter angefacht wird.

Das "Ja" auf die Frage muß natürlich illustriert werden. Die Quaternionen mit den vier Basiseinheiten 1, i, j, k, von denen drei nicht real sind, und einer nichtkommutativen Multiplikation, was in der Multiplikationstafel ersichtlich ist, erlauben ebenfalls eine anschauliche Deutung. Mit ihnen kann man die Schraubungen im Raum, d. h., die Bewegungen starrer Körper beschreiben. Den 4 Freiheitsgraden - 3 für die Translation und einer für die Drehung - entsprechen die vier Basiseinheiten der Quaternionen.

.	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Von den Quaternionen gelangt man zu den Oktaven mit 7 nicht reellen Einheiten i_1, i_2, ... i_7 und der reellen Einheit 1. Mit den Oktaven ist der umfassendste Bereich betreten, in dem noch eindeutig dividiert werden kann. Der Abbau von in $\mathbb{R}$ geltenden Rechenregeln ist insoferne abgeschlossen, als nicht nur die Monotonie der Multiplikation (in C aufgehoben) und die Kommutativität (bei den Quaternionen verletzt) ihre "Rechte" verlieren, sondern sogar die Assoziativität nurmehr in abgeschwächter Form aufrecht erhalten bleibt.

Die Schilderung des Regelabbaues ist das Bildungsgut, daß die beiden Informationen enthalten. (Reicht die Zeit, kann noch gesagt werden, daß der Beweis des Waring-Problems - jede natürliche Zahl ist als Summe von höchstens 4 Quadraten natürlicher Zahlen darstellbar - mit Hilfe der Quaternionen elegant geführt werden kann.)

Natürlich wollen die Schüler wissen, wozu man dann noch andere Erweiterungen - ohne Division - ausführt. Auch darauf gibt es eine überzeugende Antwort. Im vorigen Jahrhundert wurden u. a. die Cliffordschen Zahlen - sie stützen sich auf nicht weniger als 15 "i-Sorten", richtiger hyperkomplexe Einheiten - in die Algebra eingeführt. Sie bildeten die mathematischen Voraussetzungen (allerdings in Matrizenform ausgedrückt) für die Voraussage der Positronen aufgrund der rein theoretischen Berechnungen des Nobelpreisträgers P. Dirac. Die Moral von der Geschichte:

> Die abstrakte Mathematik von heute ist die Theoretische Physik von morgen und die Technik von übermorgen.

Für diesen Satz steht es dafür, vorher über Quaternionen und Oktaven eine Viertelstunde zu "opfern"!

Transfinite Kardinalzahlen können das Ziel einer in andere Richtung führenden Aussprache über Erweiterungsprozesse sein. Da daraus ein Brückenschlag zur Philosophie möglich wird, ist es der Überlegung wert, darauf im Unterricht einzugehen, obwohl dazu sicher eine ganze Unterrichtsstunde benötigt würde.

Daß die Potenzmenge P(M) einer endlichen Menge M von n Elementen 2^n, also mehr als n Elemente enthält, ist einfach nachzuweisen und paßt in den üblichen Unterrichtsrahmen. Die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen mittels Cauchyschem, die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen mittels Cantorschem Diagonalverfahren ohne Schwierigkeiten darzulegen. Der letztgenannte Sachverhalt ist übrigens ein gutes Beispiel für einen indirekten Beweis, für die reductio ad absurdum.

Leider ist das nicht mehr Lehrstoff, weil es in der kurzen Phase der Gültigkeit Anlaß schädliche, überflüssige Übertreibungen gab. Deshalb möge sich jeder Lehrer überlegen, ob und wenn, wie er auf diese Materie in einer Supplierstunde eingeht. Tut er es, dann genügen die angedeuteten Nachweise durchaus, der Begriff der Gleichmächtigkeit ist ja als Möglichkeit bijektiver elementweiser Zuordnung als bekannt anzusehen. Daß auch unendliche Mengen geringere Mächtigkeit als ihre Potenzmenge haben, möge als Ergebnis mengentheoretischer Überlegungen lediglich mitgeteilt werden. D. h., die Mächtigkeiten vo n M, P(M)k P(P(M)), ... bilden eine nie endende Folge transfiniter Kardinalzahlen, die mit $\aleph_0$ der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ beginnt, Deshalb ist es logisch unzulässig, von der Menge aller Mengen zu sprechen. Gäbe es sie, so wäre ihre Potenzmenge mächtiger als sie selbst und läge daher außerhalb ihr. Hingegen impliziert der Terminus Klasse aller Mengen keine Antinomie, weil ihm gewisse Mengeneigenschaften abgehen, er also keine Menge ist.

Auf einen anderen Widerspruch stößt man folgendermaßen: Die Elemente der Menge $M_{10} = \{1,2,3, \ldots 9,10\}$ sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 10, aber kein Element von M_{10} ist eine Menge und keine Zahl. Somit ist M_{10} eine Menge, die sich nicht enthält, also etwas ganz normales, ohne problematisch zu sein.

Hingegen enthält die Gesamtheit aller Mengen, die keine Quadrate sind, sich selbst, sie ist ja kein Quadrat, also eine Menge, die zu ihr gehört.

Will man nun entscheiden, ob die Menge A aller Mengen, die sich n i c h t enthalten, zur ersten oder zur zweiten Mengenkategorie gehört, merkt man, daß jede Annahme über A, A in der anderen Kategorie verweist.

Der bedeutende österreichische Mathematiker Kurt Gödel war von den eben angedeuteten Antinomien so angetan, daß er sich mit ihnen eingehend beschäftigte und Anfang der 30er Jahre den nach ihm benannten "Gödelschen Unvollständigkeitssatz" bewies:

> Jeder Kalkül, der die Arithmetik der natürlichen Zahlen zu formalisieren vermag, enthält Aussagen, die zwar in der Sprache und im Begriffssystem des Kalküls formuliert, aber nicht mit den Mitteln des Kalküls bewiesen werden können.

Hier wird den Schülern gezeigt, daß unserem Erkenntnisvermögen unüberschreitbare Schranken gesetzt sind, die das Vorwärtsdrängen des Menschengeistes bis zu einem endgültigen Abschluß verhindern! Das ist doch eine ganz tiefe Erkenntnis! Die Mathematik ist das Feld, auf dem diese Frucht des Denkens reifte, also ist der Mathematiklehrer - womöglich in Absprache mit dem Philosophen - primo loco befugt, die Jugend fachübergreifend darüber zu informieren. Der Zeitaufwand hält sich in Grenzen (erfahrungsgemäß genügt eine Stunde vollauf).

Daß manches ewig unbeweisbar bleiben wird, habe ich in der Unterrichtspraxis wiederholt mittels nachstehend geschildeter Diskussion belegt. Ich fragte, in wessen Wohnung im gleichen Augenblick weder Mensch noch Tier vorhanden seien und in die auch niemand Einblick hat. Einen, der sich meldete, fragte ich, ob er beweisen könne, daß die Wohnung samt Inhalt jetzt existiere. Nach kurzem Hin und Her sahen er und seine Mitschüler die Unmöglichkeit eines solchen Nachweises ein. Dann berichtete ich, daß namhafte Philosophen die Ansicht vertraten, es existiere nur das, was in einem Bewußtsein existiert: "Esse est percipi." Natürlich erklärte ich sofort, weder in der Lage zu sein, dem Statement zuzustimmen, noch es abzulehnen. Es sollte nur verständlich gemacht werden, aus welchen Überlegungen heraus jemand auf derartige, den Außenstehenden absurd erscheinende Auffassung gelangen könne. Gelingt es, den Jugendlichen das verständlich zu machen, hat man sie - ganz ohne Routine - einen großen Schritt vom naiven zum reiferen Denken geführt. Eine herrliche Aufgabe für den Lehrer! (Wer das abzuprüfen versucht, frevelt in meinen Augen.)

Ergebnis: Es gibt grundsätzlich unentscheidbare Fragen! Was tun? An der Hypothese, auch unbewohnte Wohnungen wären vorhanden, einfach festzuhalten, weil sie die ökonomischste Interpretation der Wirklichkeit darstellt, ist eine praktikable Art der Selbstbeschränkung, natürlich nicht nur, was unbewohnte Wohnungen betrifft.

Noch eine Frage drängt sich im gegenständlichen Zusammenhang auf. Die Naturwissenschaften sind bestrebt, das direkt oder indirekt mit den Sinnen wahrnehmbare Naturgeschehen auf eine Minimalbasis B zurückzuführen. (Ob das überhaupt möglich ist - von der Realisierung ganz abgesehen - bleibt dahingestellt.) Aber selbst, wenn der große Wurf gelänge, bliebe die Frage nach dem Sein von B offen. Weil B minimal sein soll, könnte keine weitere Reduktion auf eine schmälere Basis erfolgen. Bestenfalls ließe sich B durch eine gleichmächtige, äquivalente Basis C ersetzen. Und danach vielleicht C durch D usw. Wie weit? Egal, wie weit, man trete immer auf der Stelle ...

Ist es nicht faszinierend, welche Gedankengänge höchst allgemeiner Art der Mathematikunterricht inspirieren kann? Machen Sie doch davon in vertretbaren Ausmaß Gebrauch!

Noch eine Bemerkung im gleichen Kontext. Die natürlichen Zahlen sind abzählbar, ebenso die rationalen und die algebraischen. Aber die reellen Zahlen sind überabzählbar. Daher müssen transzendente Zahl existieren . Das ist schlüssig, selbst, wenn man nicht in der Lage wäre, auch nur eine einzige transzendente Zahl anzugeben. Ist es nicht für den Schüler verblüffend zu erfahren, daß es - grob gesprochen - "ebensoviele" natürliche wie rationale Zahlen gibt?

Zur Charakterisierung der rationalen Zahlen steht ein simples endliches Verfahren bereit. Jedes Paar natürlicher Zahlen bestimmt eine konkrete Zahl aus $\mathbb{Q}$. Bei den reellen Zahlen ist Ähnliches wegen ihrer Überabzählbarkeit unmöglich. Nicht einmal abzählbare Verfahren sind imstande, das zu leisten. Es ist nur möglich, einzelne oder sehr eingeschränkte Systeme von irrationalen Zahlen durch endliche oder schlimmstenfalls abzählbare Verfahren zu konstruieren.

Während die Informationen im Gefolge der Bereichserweiterungen über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ hinaus aufwendig sind und vorangehender sorgfältiger didaktischer Überlegungen des Lehrers bedürfen, liefert das Kapitel "Potenzen" eine Fülle von Anlässen, in k u r z e n Zusatzbemerkungen Wissenswertes allgemeinerer Art einzuflechten. Die Grundrechenarten für Potenzen müssen natürlich routiniert beherrscht werden, aber schon beim Einüben bieten sich Gelegenheiten, Notwendiges mit Interessantem zu garnieren. Dazu ein paar Anregungen.

1) Wieviel Meter hat ein Lichtjahr? Die Anzahl der Sekunden eines Jahres soll schon früh eingeprägt werden: 1 a $\approx$ 31,5 Mio. S. Merkhilfe: 1 a $\approx \pi . 10^7$ s. Die Lichtgeschwindigkeit $c = 3.10^8$ m/s sollte jeder Gebildete kennen. Also

$$\underline{1 \text{ Lj} = 10^{16} \text{ m} = 10^{13} \text{ km.}}$$

2) Ein Geschoß legt v $\approx$ 1km/s zurück. Flugzeit zur Sonne? Abstand Erde-Sonne $\approx 1,5.10^8$ km, $t = 1,5.10^8$ km: $3,1.10^7$ km/a $\approx$ 5 Jahre.

3) Wie lange fliegt dasselbe Geschoß zum nächsten Fixstern α Centauri? Der Stern ist 4,2 Lj. von uns entfernt. Flugzeit $\approx$ $4,2.10^{13}$ km : $3,1.10^7$ km/a $\approx$ $\underline{1,3.10^6 \text{ a.}}$ Oder mittels kürzerer Rechnung: c ist 300 000mal größer als v, also ist auch die Flugzeit um den Faktor 300 000 größer als die "Flugzeit" des Lichtes zum Stern, d. s.

$$\underline{4,2.3.10^5 \approx 1,3.10^6} \text{ a.}$$

4) Wieviele Kernbausteine (Proton, ebenso das Neutron haben den Radius ≈ 10^{-15} m) fänden in dichtester Lagerung im heute überblickbaren Universum (Radius ≈ 10^{10} Lj) Platz? Die Raumerfüllung eines Volumens durch kongruente Objekte wächst mit dem Kubus der Objektlänge (gleich, was als Länge genommen wird!). Somit finden im Universum

$$[(10^{10}.10^{16})/10^{-15}]^3 \approx \underline{10^{143}\text{ Bausteine}} \text{ Platz.}$$

5) Die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen im Abschnitt $[1, x]$ wird näherungsweise durch den Term <u>x/ln x</u> angegeben. Der Nährungswert ist bei allen bisher überprüften Abschnitten kleiner als $\pi(x)$, z. B.

$$\pi(100) = 25 \;, \quad 100/\ln 100 \approx 21{,}7 < 25.$$

Man nahm an, die Ungleichung $\pi(x) > n/\ln x$ gelte für jedes $x \in \mathbb{R}^+$. Doch dann ergaben sehr diffizile Untersuchungen, daß $\pi(x)$ unendlich oft größer und unendlich oft kleiner als $x/\ln x$ ist. Die erste Änderung der Größenbeziehung tritt jedoch bestenfalls erst ein, wenn x die Zahl

$$N = 10^{10^{10^{34}}}$$

überschreitet. Für welchen x-Wert zum erstenmal $\pi(x) < x/\ln x$ gilt, ist vorläufig unbekannt.

Die Aussage über $\pi(x)$ ist an sich gewiß interessant, der Schwerpunkt der Information liegt jedoch in der Größe von N. Für N versagt jede übliche verbale Bezeichnung. In konventioneller Weise könnte man analog zu

$10^{1.6}$ = Million, $10^{2.6}$ = Billion,... etwa
$10^{100.6}$ = Hektillion,... $10^{106.6}$ = Megillion
usw. einführen. Trotzdem entschwindet auch dabei

N in weiter Ferne. Der US. Mathematiker Rudy Rucker hat eine vierte Potenzoperation den drei ersten, nämlich

$$1+1+1+\ldots+1 = n, \quad a+a+\ldots+a = n.a, \quad a.a\ldots a = a^n ,$$

hinzugefügt, die er <u>Tetrieren</u> nennt. Der "Exponent" wird links der Basis hochgestellt

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}} = {}^{n}a.$$

Mit dem Tetrieren gelangt man sehr, sehr rasch in extreme Wertbereiche, z. B.

$$^{3}3 = 3^{3^{3}} = 3^{27} = 7,62.10^{12} ,$$
$$^{4}3 = 3^{7,62.10^{12}} = 10^{3,6.10^{12}}$$

$^{4}3$ hat ca. 3,6 Billionen Ziffern. Rechnet man pro Ziffer plus Abstand zur nächsten 3 mm, dann hat das Zahlenmonster etwa $1,1.10^6$ km Länge, d. i. ungefähr der dreifache Abstand Erde - Mond.

Nach dem Tetrieren könnte man das "Pentieren" einführen

$$a^{\cdot^{\cdot^{a}}}{}_{a_{a}} = {}_{n}a , \text{ (Exp. n links der Basiszahl tiefgestellt)},$$

dann das "Hexieren" usw., bis man auch da mit den Wörtern nicht mehr zurechtkommt. Definiert man, einen Ausweg suchend, einen Namen für eine extrem große Zahl, wendet auf sie wieder ähnliche Prozesse, wie die vorhin beschriebenen, so scheitert die neue Benennungsart schließlich wieder am mangelhaften Sprachschatz. Das bedeutet:

Obwohl jede konkrete Zahl irgendwie benennbar ist, kann es kein endliches Verfahren geben, j e d e natürliche Zahl mittels eines einzigen endlichen Bezeichnungsverfahrens zu benennen.

Wieder stößt der Mensch an eine Grenze. Dies drastisch vor Augen zu führen, ist der erzieherische Sinn der vorangehenden Informationen. Der Lehrer steht eben vor zwei anscheinend konträren Aufgaben. Einerseits soll der junge Mensch über die ungeheure Kraft rationalen Denkens, die wohl am ausgeprägtesten in der Mathematik sichtbar wird, unterrichtet werden. Andererseits muß aber auch gezeigt werden, daß nicht einmal dieses scharfe Werkzeug alle Probleme und zwar endgültig zu lösen vermag! Beides soll aber als komplementär vom Lehrer vermittelt werden.

6) Die Universalbibliothek. Das Kleine und das Große Alphabet (56 Zeichen), die zehn Ziffern, dazu etwa 20 Satz- und Rechenzeichen, gibt schon 86 Symbole. In Mager- und Fettdruck, dazu die Leerstelle gibt insgesamt 173 Belegungsmöglichkeiten für jeden Platz in den Seiten eines Buches. Dazu treten vermutlich noch andere Zeichen, an die ich gerade nicht denke, so daß man sicherlich mit 200 Symbolen beim Setzen eines Buches auskommt.

Ein Buch von 500 Seiten je 40 Zeilen je 60 belegbaren Plätzen enthält 1,2 Mio. Plätze. Jeder Platz erlaubt 200 verschiedene Belegungen, also existieren

$$B = 200^{1,2.10^6} = 10^{2,76.10^6}$$

Möglichkeiten, das Buch zu drucken. In der Universalbibliothek stehen alle diese möglichen Bände. Sie ist unfaßbar gorß, die 10^{123} Kernbaustei die das Universum erfüllen, sind gegen B ein Nichts. Dafür findet man in dieser Bücherei sämtliche Gedichte, Romane der Vergangenheit und Zukunft in allen Sprachen, die in Lateinschrift wiederzugeben sind. Ebenso alle Reden in Parlamenten und anderen Körperschaften, alle Geschichtswerke und Zeitungen usw., usw.. Leider wäre die Freude darüber verfrüht, denn es gibt zu jedem Buch auch eines, das sich vom korrekt gesetzten etwa auf S. 73, Zeile 14, Platz 48 ein anderes Zeichen hat, was sich ins Uferlose weiterspinnen läßt. Man hätte nicht die geringste Chance, die korrekt gesetzten Bände zu identifizieren. Die Universalbibliothek wäre wertlos, ganz abgesehen davon, daß selbst nukleonenkleine ($r = 10^{-15}$m)

Bandgröße (natürlich total unrealisierbar!) im ganzen Weltall trotz dichtester Packung nur "schäbige" 10^{143} Bände von der Gesamtzahl unterzubringen wären. Dazu bedürfte es

$$10^{2,76.10^6-123} \text{ Universen...}$$

7) <u>Runden von Exponenten.</u> Schüler (und Erwachsene...) mögen gelegentlich meinen, die Zahlen 10^{28} und $10^{28,3}$ seien zwar furchtbar groß, aber der kleine Unterschied in den Exponenten spiele keine nennenswerte Rolle, es mache das Abrunden auf 28 nicht allzuviel aus. Irrtum! Jeder materielle Körper ist aus Nukleonen (nämlich Protonen und Neutronen, ihre Massen stimmen fast überein, sie betragen $1{,}6.10^{-27}$ kg) aufgebaut. Ein Koffer von 16 kg Masse enthält somit rund 10^{28} Kernbausteine. Enthielte er $10^{27,3}$ Nukleonen, d. s. 2.10^{28} dieser Partikeln, wäre er <u>doppelt so schwer</u>. Ob man 16 kg oder 32 kg in den 5. Stock über Stiegen zu tragen hat, ist kein "kleiner Unterschied" mehr! Daher: <u>Vorsicht beim Runden von Exponenten!</u>

Der Themenkreis <u>Reihen</u> erlaubt u. a. eine interessante Information, nun wieder mit dem Schwerpunkt "Kraft des Denkens" . Die Harmonische Reihe $\Sigma 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, divergiert. Da die Primzahlen in $\mathbb{N}$ relativ dünn gesät sind, wäre es denkbar, daß die Summe $\Sigma 1/p$ aller reziproken Primzahlen konvergiert, zumal die harmonische Reihe sehr langsam divergiert. Das trifft aber nicht zu, auch $\Sigma 1/p$ divergiert. Seien p' die in Primzahlzwillingen auftretenden Primzahlen, also die Primzahlen

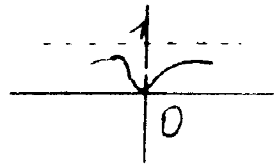
3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 41, 43, ...

Ob nur endlich viele Zwillinge existieren oder ob es deren unendlich viele gibt, ist bis heute unbekannt. Im ersten Fall konvergiert $\Sigma 1/p'$ trivialerweise. Vor einiger Zeit wurde bewiesen, daß die Summe auch dann konvergiert, falls es unendlich viele Zwillinge gäbe. Ein triumphales Ergebnis mathematischen

Schließens, das der Mitteilung im Unterricht wert ist! Der Zeitaufwand ist doch minimal.

Es ist gewiß instruktiv, bei Extremaufgaben auf das Bestehen unerfüllbarer Extremforderungen einzugehen. Sollen beispielsweise die Endpunkte einer Strecke AB durch einen möglichst kurzen Kurvenbogen verbunden werden, dessen Tangenten in A sowie in B zu AB normal sind, so ist es stets möglich, zu jedem derartigen Bogen C einen die gleichen Forderungen erfüllenden kürzeren Bogen D zu zeichnen. (s.Abb.) Das Problem besitzt keine Lösung.

In einem anderen Fall existiert wohl das Minimum, aber die üblichen Entscheidungskriterien versagen den Dienst. Es handelt sich um die Bildkurve der Gleichung $y = \exp(-1/x^2)$. Die Kurve hat in O, (natürlich nach stetiger Fortsetzung $\exp(-1/x^2)/_{x = 0} = 0$) ein absolutes Minimum (s.Abb.). Sämtliche Ableitungen nehmen bei $x = 0$ den Wert Null an, so daß das übliche Extremstellen-Kriterium versagt. (Die Bestimmung des Grenzwertes der Funktion und ihrer Ableitungen für $x \to 0$ muß, da nicht mehr elementar, unterbleiben.)



Das Kapitel "Extrema" eignet sich auch gut für einen Ausblick. Einer Gleichung $z = f(x, y)$ ist i.a. eine Fläche im Raum zuzuordnen. Auch Flächen können Scheitelwerte aufweisen. Dies etwa in Punkten, in denen die Tangentialebenen - so vorhanden - horizontal liegen. [Das ist allerdings weder notwendig (Spitzen, Randlagen) noch hinreichend (Sattelflächen)]. Noch allgemeiner ist das Problem, allfällige Extremwerte einer Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mit n unabhängigen Variablen zu bestimmen. Die einschlägigen Methoden sind längst entwickelt worden, sie gehören der Höheren Mathematik an. Ja, es ergab sich sogar die Notwendigkeit, die Version mit abzählbar vielen Variablen in Angriff zu nehmen. Ein so reales Gebiet wie die Quantenmechanik zwang dazu. Aber auch das ist noch nicht alles!

Schon in relativ kurzer Zeit nach der Erfindung der Differential-Rechnung stellte sich in der Mechanik das Problem, die Kurve zu berechnen, längs der eine reibungsfreie Kugel in der kürzesten Zeit vom höher gelegenen Punkt P zum tiefer gelegenen Punkt Q rollt. P und Q lassen sich durch überabzählbar viele Kurvenbogen verbinden. Es liegt also hier ein Extremproblem mit überabzählbar vielen Variablen vor. Euler, Lagrange u.v.a. entwickelten dazu einen ganz neuen Zweig der Mathematik, die Variationsrechnung, die heute einen umfangreichen Bestandteil unserer Wissenschaft darstellt.

Die spektakulären Rechenleistungen moderner Computer suggieren die irrige Ansicht, mit automatischen Rechenanlagen alle numerischen Probleme, wenn nicht heute, so doch irgendeinmal in der Zukunft lösen zu können. Da wäre es dringend geboten, die Dinge ins rechte Licht zu rücken. Der Computer arbeitet nicht nur mit unglaublicher Geschwindigkeit, er führt auch mit allen möglichen Abkürzungen versehenen Programme aus. Im Letzteren liegt aber der Haken.

Statt das n-te Glied einer Folge schrittweise, also von a_1 ausgehend, über a_2, a_3,... zu ermitteln, ist der direkte Zugriff auf a_n i.a. mit Abstand schneller zu vollziehen, soferne man den erzeugenden Term der Folge kennt. Nun, bei der Folge der Primzahlen spießen sich bereits die Dinge, niemand kennt den erzeugenden Term, also bilden Mühe und/oder Zufall die einzigen Zugänge zu großen Primzahlen. Nur die vage Hoffnung mag Trost spenden, daß vielleicht doch eines Tages der Term entdeckt werden könnte.

Doch kennt man bereits Fälle, wo ähnliche Hoffnungen beweismäßig im Keim erstickt wurden. Jeder Rechenautomat ist ein physikalisches System. Wenn deshalb zu beweisen ist, daß in bestimmten Fällen der

der Computer nicht die von der Natur praktizierte sukzessive Methode abzukürzen vermag, dann sind auch der Rechenanlage zustandsüberspringende Zugriffe im Prinzip unmöglich.

Das hat sich bereits u. a. in der Populationsdynamik (Biotope, Kugelsternhaufen) herausgestellt. Es gibt Artenverteilungen in gewissen Biotopen, welche der Frage nach dem allenfalls stabilen Endzustand auch mit den besten Automaten nur durch schrittweisen Übergang von Zustand zu Zustand nachzugehen erlauben. Damit ist die Existenz von grundsätzlich u n e n t s c h e i d b a r e n Problemstellungen in der Mathematik evident gemacht. Sinnfällige Beispiele aus dem täglichen Erleben sind das Wetter oder die Kinematik fallender dürrer Blätter im Wind.

Aber abgesehen vom mathematischen Aspekt bringt die quantenmechanische Struktur der physikalischen Ereignisabläufe sogar die definitive Kenntnis über das erste Glied a_1 einer Zustandsfolge u n b e h e b - b a r wegen der Unschärferelation ins Wanken.

Es erscheint mir daher u n e r l ä ß l i c h , den jungen Leuten anhand einsichtiger Beispiele einzuprägen:

Die Welt ist grundsätzlich nicht bis ins letzte Detail berechenbar!

Um Mißverständnisse über die vorgetragenen - mit geringen Ausnahmen kurzen - Vorschläge für die ins Meer der Routinearbeit zu streuenden Informationen bzw. Ausblicke zu verhindern, sei mit größtem Nachdruck abschließend betont:

Niemand möge glauben, das gesamte im gegenständlichen Referat angebotene Material solle oder könne einer Klasse dargeboten werden! Keineswegs! Aber jede Kollegin und jeder Kollege Mathematiker werden gebeten, eine ihnen passend erscheinende Auswahl zu treffen oder, wenn Zufall sowie Aktualität das Eine oder das Andere virulent machen, es mit B e d a c h t und Sorgfalt der Jugend zu präsentieren. Warum sollen nicht auch Schüler Leckerbissen der Wissenschaft verkosten und ihre "Weltansicht" durch Ausblicke vertiefen dürfen?

Wer dazu beiträgt, mag gewiß sein, einen wesentlichen Bildungsauftrag vollzogen, das Ansehen der Wissenschaft im Bewußtsein der Jugend gehoben, aber auch manches Talent geweckt zu haben.

Walter Kranzer